2-15/11/25 الموضوع: 12

تمهيد: ليكن A حيز لي فوق الحلقة R عندئذ:

1. أيا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن

$$D(D^n A) = D^{n+1} A$$

2. أيا كان $n, m \in \mathbb{N}$ فإن

$$D^m(D^n A) = D^{m+n} A$$

البرهان: «نثبت العلاقتين بالاستقراء حسب n»

1. بالاستقراء حسب n.

$n=0$: $D(D^0 A) = DA$

$n=1$: $D(D A) = D[DA, DA] = D^2 A$

لنفرض أنه لأجل $k \in \mathbb{N}$ فإن

$$D(D^k A) = D^{k+1} A$$

$$D(D^{k+1} A) = D([D^k A, D^k A]) = [[D^k A, D^k A], [D^k A, D^k A]]$$

$$= [D^{k+1} A, D^{k+1} A] = D^{k+2} A$$

ومنه العلاقة صحيحة

2. بالاستقراء لأجل حسب m

لأجل $m=1$ العلاقة صحيحة حسب [1]

لنفرض أن العلاقة صحيحة لأجل m :

عندئذ:

$$D^{m+1}(D^n A) = [D^m(D^n A), D^m(D^n A)]$$

$$= [D^{m+n} A, D^{m+n} A] = D^{(m+1)+n} A$$

ومنه فإن العلاقة صحيحة.

/ /　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　الموضوع: ....

مبرهنة:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R، I مثاليا من A، الشروط الآتية متكافئة:

1- الجبر A قابل للحل.

2- كل من I، A/I قابل للحل.

البرهان:

[1] ⇐ [2] واضح، مبرهن سابقا

[2] ⇐ [1]

لنفرض أن كل من I، A/I قابل للحل.

عندئذ يوجد $n, m \in N$ بحيث

$D^n I = 0$ و $D^m(A/I) = 0 = I$

نأخذ التشاكل الغامر $\pi : A \longrightarrow A/I$

فنجد أن: (باستخدام نواة التشاكل الغامر)

$$\pi(D^m A) = D^m(\pi(A)) = D^m(A/I) = 0$$

ومنه:

$$D^m(A/I) = D^m(A+I)$$

لنبرهن على أن:

$$D^n(A+I) = D^n A + I$$

$n=0$ $\quad D^0(A+I) = A+I = (D^0 A) + I$

$n=1$ $\quad D^1(A+I) = [A+I, A+I] = [A, A] + I = (DA) + I$

لنفرض أنها صحيحة من أجل k

$$D^{k+1}(A+I) = [D^k(A+I), D^k(A+I)] = [(D^k A) + I, (D^k A) + I]$$
$$= [D^k A, D^k A] + I = (D^{k+1} A) + I$$

ومن ثم:

$$D^m(A/I) = D^m(A+I) = D^m(A) + I = I$$

$$D^m A \subseteq I$$

$D^{m+n}A = D^n(D^m A) \subseteq D^n I = 0$

ومنه الجبر A جبر لي قابل للحل.

مبرهنة: ليكن $f: A \longrightarrow A'$ تشاكل جبور لي و I مثالي في A، إذا كان $I \subseteq Ker f$ عندئذ يوجد تشاكل جبور لي $\theta: A/I \longrightarrow A'$ وحيد يجعل المخطط الآتي

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ & \searrow^{\pi} & \nearrow_{\theta} \\ & A/I & \end{array}$$

تبديليا أي $\theta\pi = f$ حيث π تشاكل قانوني غامر.

البرهان:

لنعرف $\theta: A/I \longrightarrow A'$ بالشكل الآتي

$\forall\ a+I \in A/I\ ;\ \theta(a+I) = f(a)$

ان θ تطبيق لانه اذا كان

$a+I, b+I \in A/I\ ;\ a+I = b+I$

فان $(a-b)+I = I$

ومنه يكون $a-b \in I \subseteq Ker f \Leftarrow f(a-b) = 0$

اي ان $f(a) = f(b)$

$\theta(a+I) = \theta(b+I)$

وواضح انه تشاكل جبور لي.

ومنه اذا كان $a \in A$ فان

$\theta\pi(a) = \theta(\pi(a)) = \theta(a+I) = f(a)$

تساوي تطبيقان عن نفس المنطلق اذاً

$\theta\pi = f$

ليكن $\mu: A/I \longrightarrow A'$ تشاكل جبور لي آخر لاحظ يكون $\mu\pi = f$ عندئذ:

ليكن $a+I \in A/I$ عندئذ:

$$\mu(a+I) = \mu(\pi(a)) = f(a) = \theta\pi(a) = \theta(a+I)$$

ومنه $\theta = \mu$

مبرهنة التماثل الثانية:

ليكن A مبدل فوق الحلقة R، I, J مثاليين من A عندئذ

$$(I+J)/J \cong I/(I \cap J)$$

البرهان:

نعرف علاقة $f: I \to I+J$ بالشكل الآتي:

$$\forall\ a \in I\ ,\ f(a) = a+J$$

إن f تطبيق وأيضاً تشاكل حبوري لي

أيضاً f غامر لأنه إذا كان $\bar{z} \in I+J/J$ عندئذ:

$\bar{z} = z+J$ ، $z \in I+J$

عندئذ $z = a+b$ حيث $a \in I$ ، $b \in J$

ومنه $\bar{z} = z+J = (a+b)+J$

$$= (a+J) + \underbrace{(b+J)}_{J} = a+J$$

ومنه $f(a) = a+J = \bar{z}$

ومنه $\dfrac{I}{\ker f} \cong \dfrac{I+J}{J}$

لنثبت أن $\ker f = I \cap J$ وينتج المطلوب

انتهت المحاضرة